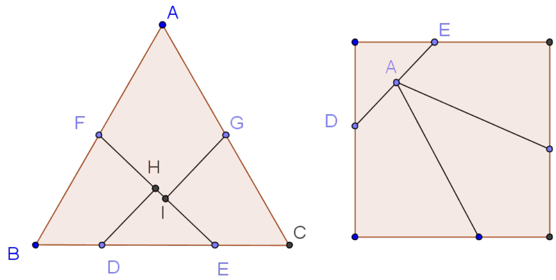
臺北市立建國高級中學 102 學年度教師甄試 數學科試題

一. 填充題 (每題 7分，共84分)

1. 設 $f(x)$ 爲一 317 次多項式滿足 $f(k)=\frac{1}{k}$, $k=1,2,3\ldots,318$，則 $f(320)=$ ____。
2. 平面上坐標上，Γ 爲所有的點 P 滿足到直線 $x=4$ 與 $(1,0)$ 的距離和爲 5 之曲線。試求 b 的範圍，使得 Γ 上恰有三組點，關於點 $(b,0)$ 對稱。
3. 若函數 $f(x)$ 滿足 $f(1)=1$, $f(x)+f(1-x)=1$, $f(\frac{x}{6})=\frac{1}{2}f(x)$，其中 $0\le x\le 1$，且對 $0\le x_1<x_2\le 1$，有 $f(x_1)\le f(x_2)$，則 $f(\frac{1}{2013})=$ ____。
4. $\sum\limits_{k=1}^{2013}\left[\sqrt[5]{\frac{2013}{k}}\right]=$ ____。([ ] 爲高斯符號)
5. 如圖，若邊長爲 2 的正三角形，可經拼剪爲正方形，則 $\overline{BE}=$ ____。

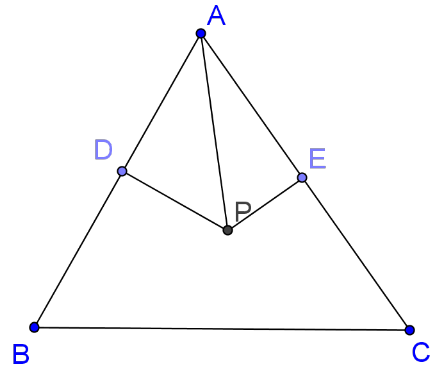


6. 空間中，有四個球兩兩相切(外切)，半徑分別爲 $2,3,2,3$。有另一球與四球皆外切，則其半徑 = ____。
7. $OABC$ 爲一邊長爲 1 的正四面體，D, E 分別爲 $\overline{AB}$, $\overline{OC}$ 中點。兩歪斜線 $\overline{OD}$ 和 $\overline{BE}$ 的距離爲 ____。
8. 若 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ 有實數解，則 a^2+b^2 的最小值爲 ____。
9. 不等式 $\frac{2x^2-4x+3}{(x-1)^3}>x^3+2x$ 的實數解爲 ____。
10. 若 a, b, c 爲正實數，則 $\frac{a+3c}{a+2b+c}+\frac{4b}{a+b+2c}-\frac{8c}{a+b+3c}$ 的最小值爲 ____。
11. 小明寫 n 封信分別給 n 個朋友 $(n\ge 3)$，有 n 個寫好名字的信封，一次寫兩封，分別隨便裝入兩個信封內，則裝錯信之數量的期望值 = ____。
12. 設 $F(x)=\int_0^1\frac{t^x-1}{\ln t}dt$，則 $\frac{d}{dx}F(x)=$ ____。

一. 計算題 (共36分)

1. 已知方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有三實根，且 $-2\le a+b+c\le 0$。求證：此方程式必有一實根 α 滿足 $0\le\alpha\le 2$。(10分)

2. 如右圖，銳角三角形 $\triangle ABC$ 中，D、E 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上。過 D、E 分別作 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 之垂線，交於 $\triangle ABC$ 內部一點 P。
試證：$\overline{AP}\cdot(\overline{BC}-\overline{DE})\ge\overline{BD}\cdot\overline{PE}+\overline{CE}\cdot\overline{PD}$。(1x分)
(??不確定右式??)



3. 令 $S=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\mathbb{Z}\}$，$f:S\to S$ 且 $f(x,y,z)=(xyz,xy+yz+zx,x+y+z)$。求 $f(f(x,y,z))=(x,y,z)$ 的所有解。(1x分)